

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”***Ediția a XXVIII-a***ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026****X. osztály – H1 – Szakközép kategória****1. feladat (20 pont)**

- a) Határozd meg azokat a z komplex számokat, amelyekre teljesül a $3|z| - 2\bar{z} = 3 - 2i$ egyenlőség!
- b) Ha z_1 és z_2 a $z^2 - z + 1 = 0$ egyenlet megoldásai, számítsd ki az $S_1 = z_1^{100} + z_2^{100}$ és az $S_2 = (z_1 - 1)^{200} + (z_2 - 1)^{200}$ összeget!

2. feladat (20 pont)

- a) Határozd meg $x \in \mathbb{R}$ azon értékeit, amelyekre $\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^x} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})^x} \leq 6$.
- b) Oldd meg a $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 4^x + 9^y = 25 \end{cases}$ egyenletrendszer!

3. feladat (20 pont)

Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ha } x \leq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$ függvény.

- a) Igazold, hogy az f függvény invertálható!
- b) Adott a $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2^{x+1} - 1$ függvény. Oldd meg az $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$ egyenletet!

4. feladat (30 pont)

Egy technológiai üzemben egy automatizált ipari folyamatban felhasznált víz paramétereit ellenőrzik. Egy ipari vízminta pH-értékét a $\text{pH} = -\lg[\text{H}^+]$ képlet alapján számítják ki, ahol $[\text{H}^+]$ a hidrogénionok koncentrációja (mol/L-ben kifejezve) és 5-ös értéket kapnak. Ugyanezen mintán a kórokozó baktériumok számának időbeli alakulását is vizsgálják $N(t)$ vel (t órában értendő), valamint a mintavétel pillanatában fennálló számukat (N_0) a következő összefüggést használva: $N(t) = N_0 \cdot 10^{0,3t}$.

- a) Határozd meg, hogy hányszorosára kell csökkenteni a hidrogénionok koncentrációját ahhoz, hogy a víz semlegessé váljon (a semleges víznek $\text{pH} = 7$ értéke van)!
- b) Mennyi idő után fog megkétszereződni a baktériumok száma a vízmintában? Kerekítsd a kapott eredményt a legközelebbi természetes számra!
- c) Az üzem egyik berendezésének működése közben a hang intenzitása I (W/m^2 -ben kifejezve) növekszik. Határozd meg, mekkora lehet ennek az intenzitásnak a legnagyobb értéke anélkül, hogy a munkavédelmet veszélyeztetné, tudva, hogy a kockázati küszöb a zajszint 85 dB-nél nagyobb értékétől kezdődik. Ezt a zajszintet az $L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$ (dB-ben kifejezve) összefüggéssel számolják ki, ahol $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Megjegyzés:

Munkaidő: 3 óra; minden feladat kötelező; hivatalból 10 pont jár.

A maximális pontszám 100 pont.